Моменты АФ.

Моменты $\mathrm{h}_a(x)$

$\widehat{\mathrm{h}_a}(t) = F(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{h}_a(x) e^{-itx} dx = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{a^k}\right)$

$F^{(n)}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (ix)^n \mathrm{h}_a(x) e^{-itx} dx = i^n \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n \mathrm{h}_a(x) e^{-itx} dx$

$a_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n \mathrm{h}_a(x) dx = \frac{F^{(n)}(t)}{i^n}$

Так как $\mathrm{h}_a(x)$ - четная функция, ее нечетные симметричные моменты равны нулю. Найдем четные моменты.

$a_{2n} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2n} \mathrm{h}_a(x) dx = \frac{F^{(2n)}(t)}{i^{2n}} = \frac{F^{(2n)}(t)}{(-1)^n}$

Так как $F(t) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{a^k}\right)$, оно обладает свойством

$F(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{a}\right) F\left(\frac{t}{a}\right)$

Так как $\sin(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$,

$\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{a}\right) = \frac{\sin\left(\frac{t}{a}\right)}{\frac{t}{a}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \left(\frac{t}{a}\right)^{2n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^2 n}{(2n+1)! \cdot a^n}$

Разложим обе части равенства в ряд Тейлора

$F(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{2n} t^{2n} = \sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \, t^{2l}}{(2l+1)! a^{2l}} \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{c_{2k} t^{2k}}{a^{2k}}$

Найдем коэффициенты при t^{2n} (приравняем $l = n - k$)

$c_{2n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k+1)! \, a^{2n-2k}} \cdot \frac{c_{2k}}{a^{2k}}$

$a^{2n} \, c_{2n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} \, c_{2k}}{(2n-2k+1)!} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} \, c_{2k}}{(2n-2k+1)!} + c_{2n}$

$\left(a^{2n} - 1\right) c_{2n} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} \, c_{2k}}{(2n-2k+1)!}$

$c_{2n} = \frac{1}{a^{2n}-1} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} \, c_{2k}}{(2n-2k+1)!}$

$a_{2n} = (-1)^n \, (2n)! \, c_{2n}$

Для вычисления несимметричных моментов: $b_{2k-1} = \int\limits_{0}^{\frac{1}{a-1}} x^{2k-1} \mathrm{h}_a(x) dx =$

$\frac{1}{2k} \int\limits_{0}^{\frac{1}{a-1}} \mathrm{h}_a(x) dx^{2k} = \frac{1}{2k} \mathrm{h}_a(x) x^{2k} \Big|_{0}^{\frac{1}{a-1}} - \frac{1}{2k} \int\limits_{0}^{\frac{1}{a-1}} x^{2k} \mathrm{h}_a'(x) dx$

Внеинтегральный член равен нулю. Учтем уравнение АФ и носители слагаемых (пусть $a > 2$)

$\frac{1}{2k} \int\limits_{0}^{\frac{1}{a-1}} x^{2k} \frac{a^2}{2} \mathrm{h}_a(ax-1) dx = \frac{a^2}{4k} \int\limits_{\frac{a-2}{a(a-1)}}^{\frac{1}{a-1}} x^{2k} \mathrm{h}_a(ax-1) dx = \left| \begin{array}{c} ax - 1 = t \\ x = \frac{t+1}{a} \end{array} \right| =$

$\frac{a^2}{4k} \int\limits_{-\frac{1}{a-1}}^{\frac{1}{a-1}} \frac{(t+1)^{2k}}{a^{2k}} \mathrm{h}_a(t) d\frac{t+1}{a} = \frac{1}{4ka^{2k-1}} \int\limits_{-\frac{1}{a-1}}^{\frac{1}{a-1}} (t+1)^{2k} \mathrm{h}_a(t) dt = \frac{1}{4ka^{2k-1}} \sum\limits_{i=0}^{2k} C_{2k}^{i} \int\limits_{-\frac{1}{a-1}}^{\frac{1}{a-1}} t^i \mathrm{h}_a(t) dt$

Все слагаемые представляют собой симметричные моменты h_a. Нечетные слагаемые равны нулю, четные равны ранее вычесленным симеетричным четным моментам.

$\frac{1}{4ka^{2k-1}} \sum\limits_{i=0}^{k} C_{2k}^{2i} \int\limits_{-\frac{1}{a-1}}^{\frac{1}{a-1}} t^{2i} \mathrm{h}_a(t) dt = \frac{1}{4ka^{2k-1}} \sum\limits_{i=0}^{k} a_{2i} C_{2k}^{2i}$

Подставляя $a = 2$, получим формулы для моментов $\mathrm{up}(x)$